

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ
СИСТЕМ

ФУНКНЕР АНАСТАСИЯ АЛЕКСАНДРОВНА

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЯВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО
ХАОСА В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ**

НАПРАВЛЕНИЕ 010400

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ,
СТАРШИЙ ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

Кулабухова Н. В.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2016

Содержание

Введение	2
Постановка задачи	4
Обзор литературы	6
Глава 1. Введение в предметную область	8
1.1 Динамические системы	8
1.2 Классификация динамических систем	9
1.3 Нелинейные системы и детерминированный хаос	10
1.4 Гамильтонов формализм	17
1.5 Матричный формализм	18
1.6 Симплектичность	21
Глава 2. Исследование динамической системы для негармонического осциллятора	24
2.1 Негармонический осциллятор	24
2.2 Исследование решения уравнения негармонического осциллятора	24
2.3 Решение уравнения негармонического осциллятора в идеологии матричного формализма	27
2.4 Получение симплектических поправок	32
2.5 Исследование матричного решения уравнения негармонического осциллятора	33
Выводы	37
Заключение	38
Список литературы	39
Приложение к главе 2.	41

Введение

Большое число объектов и процессов природы можно представить с помощью такой математической модели, как нелинейная динамическая система. Ученые активно занимаются нелинейными системами лишь последние 50 – 60 лет в связи с открытиями в них детерминированного хаоса. Детерминированный хаос возникает в диссипативных и консервативных системах. К последним относят гамильтоновы системы, активно изучаемые в классической механике. В таких системах хаос можно наблюдать с помощью построения фазового портрета или сечения поверхности Пуанкаре.

Для класса нелинейных дифференциальных уравнений, с помощью которых часто описывается эволюция динамической системы, не существует универсального способа решения. Это сильно затрудняет изучение нелинейных систем и вынуждает применять для получения решения численные методы. Известно, что численное решение всегда обладает методической погрешностью. Также численные методы не учитывают свойства определенного класса систем. Для гамильтоновых систем характерно свойство симплектичности, которое нарушается при решении системы дифференциальных уравнений распространёнными численными методами. Получаемые численные решения демонстрируют поведение, похожее на хаотическое. Существуют способы учитывать свойство симплектичности в численном решении и, таким образом, отличать динамический хаос от неточности решения системы.

В данной работе будет рассматриваться метод последовательных приближений решения системы дифференциальных уравнений в идеологии матричного формализма на примере негармонического осциллятора. Также для решения данной системы будут вычислены симплектические коэффициенты. На примеры негармонического осциллятора будет

продемонстрирована разница в решении системы уравнений с учётом симплектичности и без неё.

Постановка задачи

Целью данной выпускной квалификационной работы является исследование нерегулярного поведения динамической системы для негармонического осциллятора и поиск способов для устранения данной проблемы. Для достижения поставленной цели необходимо выполнить следующие задачи:

- изучить основные понятия и определения в области динамических систем и детерминированного хаоса;
- изучить методы решения нелинейных систем;
- изучить динамическую систему для негармонического осциллятора с помощью готовых численных методов математического пакета Maple 15;
- решить систему дифференциальных уравнений движения негармонического осциллятора методом последовательных приближений решения;
- вычислить симплектические поправки к решению данной системы;
- изучить и сравнить полученное решение с численными решениями, полученными ранее посредством готовых методов, с помощью математического пакета Maple 15.

Обзор литературы

Нарушение свойства симплектичности гамильтоновой системы при её решении может привести к тому, что поведение динамической системы при построении фазового портрета её решения будет казаться хаотическим. В статье [19] автор рассматривает динамическую систему, описывающую поведение негармонического осциллятора. Решив систему методом рядов Тейлора 4-го порядка, автор строит фазовый портрет, на котором можно выделить области хаотического и регулярного движения. После автор описывает методы рядов Тейлора и Рунге-Кутты, коэффициенты которых учитывают свойство симплектичности гамильтоновых систем. Далее демонстрируются фазовые портреты новых решений, на которых не наблюдается нерегулярного движения.

В статье [16] исследовательская группа разработала специальный алгоритм для изучения динамики гамильтоновых систем. Алгоритмы были разработаны и проанализированы с помощью фреймворка симплектической геометрии. Этот алгоритм разработан только для гамильтоновых систем, благодаря чему в нём отсутствуют шаги и действия для негамильтоновых систем. Были проведены численные эксперименты, подтверждающие пользу и выгоду использования данного алгоритма для гамильтоновых систем.

В статье [14] рассматриваются численные методы для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику осциллятора. Рассматриваются алгоритмические и аналитические различия в построении методов для изучения осциллятора с почти постоянными высокими частотами и переменными высокими частотами. В первом случае применяются методы тригонометрического интегрирования. Во втором случае – адиабатического интегрирования для систем, решение которых зависит от частоты. В обоих случаях авторы старались найти такие алгоритмы для вышеуказанных методов, которые будут совершать «большие» шаги и экономить вычислительные ресурсы.

В диссертации [17], посвященной исследованию сохранения периодичности в вариационном численном интегрировании, автор рассматривает гамильтоновы системы. Углублённо изучаются вариационные методы, сохраняющие периодичность траектории гамильтоновых систем. Это также важное свойство поведения гамильтоновых систем, связанное со свойством симплектичности. В результате исследований и экспериментов автору удаётся показать, что предложенные М. Вестом вариационные интеграторы однозначно определяют параметры для симплектического одношагового метода, позволяющего сохранить периодичность траекторий гамильтоновых систем.

Таким образом, гамильтоновы системы являются актуальной областью для изучения, в связи с большим интересом к ним множества исследователей. Для решения таких систем создано много численных методов и алгоритмов. В некоторых работах авторы создают специальные инструменты для решения именно гамильтоновых систем, другие авторы изменяют уже существующие численные методы, что позволяет учитывать особенности гамильтоновых систем.

Глава 1. Введение в предметную область

В данной главе излагаются основные понятия и определения, используемые далее в работе.

1.1 Динамические системы

Любую систему, состояние которой можно определить в каждый момент времени $t > t_0$, имея только начальное состояние системы в момент времени t_0 и зная лишь её эволюцию, то есть закон изменения, называют динамической [7, 2]. Такую систему также называют детерминированной, так как всегда можно определить состояние системы в любой момент времени по имеющемуся закону. Динамические системы являются моделями большого числа процессов и объектов физики, химии, биологии, общества и т.д.

Закон изменения состояния системы можно задать несколькими способами: с помощью дифференциальных уравнений, дискретного отображения, цепей Маркова или графов. Любую эволюцию системы можно представить, используя оператор T_t :

$$x(t) = T_t x(t_0), \quad (1)$$

где $x(t)$ – это параметры системы в момент времени $t > t_0$, $x(t_0)$ – это параметры системы в начальный момент времени t_0 [2].

Пусть состояние системы в любой момент времени $t \geq t_0$ задаётся M параметрами. Тогда эволюцию системы из состояния $x(t_0)$ в состояние $x(t)$ можно представить как движение точки по траектории в M -мерном фазовом пространстве. Такая траектория будет также называться фазовой [7].

В данном случае фазовое пространство – это пространство размерности M , по осям которого откладываются значения M параметров в каждый момент времени $t \geq t_0$. Для времени в фазовом пространстве не предназначена отдельная ось, оно является параметром, то есть $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_N(t)$ – параметры состояния системы в момент времени t .

Для изучения поведения системы бывает необходимым рассмотреть всевозможные фазовые траектории в одном фазовом пространстве. Такая совокупность фазовых траекторий называется фазовым портретом системы [13].

1.2 Классификация динамических систем

Динамические системы принято классифицировать по нескольким признакам.

По структуре фазового пространства системы делят на непрерывные и дискретные. Если можно получить значение состояния системы для любого момента времени $t \geq t_0$, то такое время является непрерывным, а система (1) с отображением T называется потоком. В том случае, если множество значений времени t является дискретным, система называется каскадом.

По виду отображения динамические системы классифицируют на линейные и нелинейные. Если оператор T обладает свойством суперпозиции, то есть $T[x(t) + y(t)] = T[x(t)] + T[y(t)]$, то систему с таким оператором эволюции называют линейной. Если данное условие для оператора T не выполняется, то систему называют нелинейной [2, 4].

По типу размерности фазового пространства динамические системы делят на сосредоточенные и распределённые. Для описания сосредоточенных колебательных систем достаточно конечномерного фазового пространства. Распределенные системы определяются в бесконечномерном фазовом пространстве и требуют бесконечно много данных для определения состояния [2].

Если на динамическую систему не действуют внешние силы или ими пренебрегают, то такую систему называют автономной. В противном случае, динамическая система называется неавтономной [2].

По способу изменения энергии или объёма фазового облака динамические системы делят на консервативные и неконсервативные. Если энергия системы не изменяется во времени или объём её фазового облака остаётся постоянным, то её называют консервативной. Среди систем с изменяющейся энергией, то есть неконсервативных систем, выделяют диссипативные системы. Такие системы характеризуются уменьшающимся во времени запасом энергии. Также фазовое облако диссипативной системы со временем становится меньше и в итоге концентрируется на подмножество фазового пространства с нулевым объёмом – аттракторе [2, 7, 11]. Понятие аттрактора будет рассмотрено более подробно в следующем разделе.

1.3 Нелинейные системы и детерминированный хаос

Динамические системы принято делить на линейные и нелинейные по наличию или отсутствию соответственно у оператора эволюции принципа суперпозиции. Линейные системы пользуются большей популярностью. Для их решения и описания существует большой математический аппарат. Достаточно много зависимостей в природе являются линейными. Также при рассмотрении динамической системы, решение которой не требует большой точности или внешние влияния на неё малы, можно ограничиться линейным законом эволюции [9].

Класс нелинейных систем является гораздо менее изученным. И до сих пор не существует общего подхода к решению или описанию любой нелинейной системы. Существуют отдельные классы дифференциальных и интегральных уравнений, для которых найдены аналитические решения. Однако полное описание и знание поведения одного класса нелинейных функций никаким образом не характеризует особенности, и даже простейшее поведение другого класса нелинейных функций. Именно поэтому для работы с нелинейными динамическими системами не подходят хорошо разработанные методы для решения линейных задач. Итак, область

нелинейных явлений до сих пор остаётся неизведанной и представляет большой интерес для ученых [6].

В 1882 году французский математик А. Пуанкаре открыл явление динамического хаоса в гамильтоновых системах. Однако его открытия не были замечены в научном обществе. Снова с явлением детерминированного хаоса столкнулся американский метеоролог Э. Н. Лоренц в 1963 году. Э.Н. Лоренц рассматривал систему из трёх связанных нелинейных уравнений первого порядка (2), описывающих метеорологические процессы [13, 18]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(r - z) - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (2)$$

Э.Н. Лоренц, используя следующие значения параметров системы (2): $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и $r = 28$, с помощью компьютера просчитал большое множество точек и изобразил фазовое пространство в сечениях плоскостями Оху, Охz и Оуz. При этом он заметил, что используя сколь угодно близкие значения начальных данных, он получает совершенно разные решения системы. Причиной такого явления, служит то, что для нелинейных систем характерна расхожимость изначально близких траекторий с экспоненциальной скоростью в ограниченной области фазового пространства [13]. Таким образом, Э.Н. Лоренц доказал, что невозможно делать долгосрочные метеорологические прогнозы. Во-первых, из-за неустранимой погрешности измерительных приборов невозможно предоставить динамической системе точные начальные данные для получения точного предсказания состояния системы в какой-то будущий момент времени. Во-вторых, из-за ограниченности ресурсов и мощностей компьютеров, чем более поздний момент времени выбирается для получения состояния системы, тем больше накапливается вычислительная погрешность. Итак, если для нелинейной динамической системы характерен динамический хаос, то решение, полученное с изначальной неустранимой погрешностью и

накопленной вычислительной, может значительно отличаться от действительного [18]. Чувствительность к начальным данным системы Э.Н. Лоренц назвал эффектом бабочки.

Далее под термином детерминированный или динамический хаос следует понимать хаотическое, или нерегулярное, движение нелинейной системы, у которой однозначно определен закон эволюции при имеющихся начальных данных. Хаотическое движение не является случайным. Случайным движением называют то, которое нельзя многократно и однозначно повторить. Ярким примером случайного движения является Броуновское движение частиц. В случае хаотического движения существует определенный закон, по которому оно происходит [2, 7, 13].

Явление детерминированного хаоса можно наблюдать в нескольких видах нелинейных систем: диссипативных и консервативных (см. рис. 1) [13].

За последнее время было открыто три пути возникновения хаоса.

Первый путь называется каскад бифуркаций и был открыт Митчеллом Фейгенбаумом. Также называется последовательностью Фейгенбаума. Он рассматривал рекурсивные соотношения вида:

$$x_{n+1} = \lambda f(x_n) \quad (3)$$

График такой рекурсивной функции (3) колеблется между неподвижными точками. Число таких точек удваивается при определенном значении внешнего параметра λ . Именно поэтому этот путь называется бифуркацией – от латинского «bis» и «furca» – вилы с двумя зубцами. Эти колебания продолжаются до тех пор, пока число неподвижных точек не станет бесконечным при конечном параметре λ . Тогда можно наблюдать нерегулярное движение системы, заданное таким рекурсивным соотношением, которое и является детерминированным хаосом [13, 15].

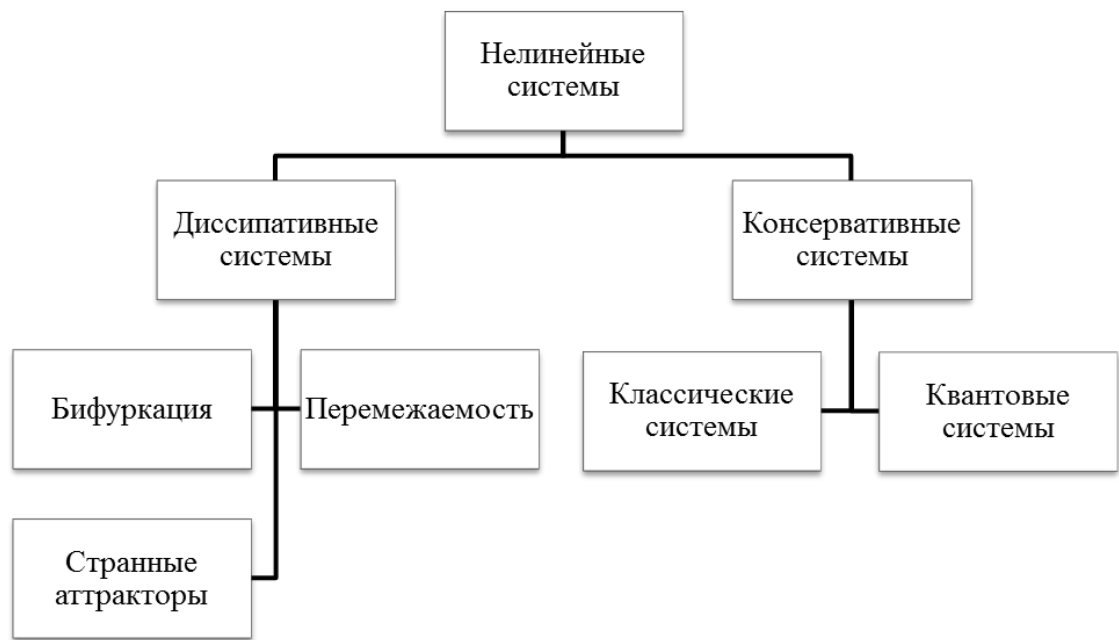


Рис. 1. Классификация систем, которые проявляют детерминированный хаос.

Другой путь к появлению хаоса – это перемежаемость. Он характеризуется чередованием регулярного и хаотического движения. При этом хаотическое движение происходит всплесками и подчиняется некоторому статистическому закону распределения [13, 20].

Последний путь, приводящий к хаосу в диссипативных системах, связан с появлением у динамической системы особого фазового портрета – странного аттрактора. Странный аттрактор – это притягивающее множество в фазовом пространстве сложной структуры, построенное для двух- или трёхмерного отображения системы [7]. Фазовые траектории такой системы, пройдя несколько неустойчивостей, начинают притягиваться к ограниченной области нулевого объёма, в которой изначально близкие траектории начинают расходиться и можно наблюдать хаотическое движение. Например, на рис. 2 изображен классический аттрактор Лоренца для системы [5]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(r - z) - y. \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (2)$$

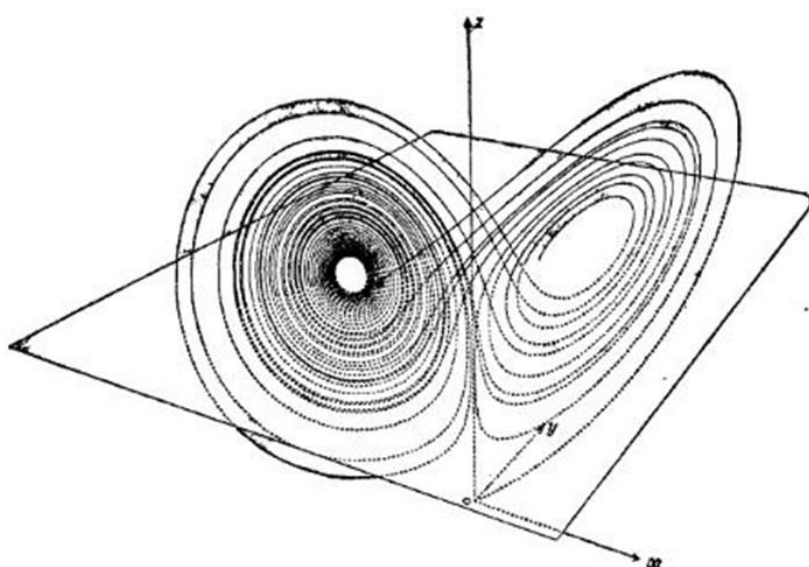


Рис. 2. Классический аттрактор Лоренца [12].

Рассмотрим теперь, как проявляется хаос в консервативных системах.

Среди динамических систем с постоянной энергией из классической механики также возможно наблюдать детерминированный хаос. В 1954 А. Н. Колмогоров сформулировал теорему, из которой следует, что для гамильтоновой системы движение в фазовом пространстве не является полностью регулярным или нерегулярным. Позднее В. И. Арнольд и Ю. К. Мозер последовательно доказали эту теорему, и её стали называть теоремой КАМ (Колмогорова — Арнольда — Мозера). Такие динамические системы являются моделями следующих процессов: движение трёх тел в космическом пространстве, движение спутников и астероидом вокруг планеты, движение частиц в ускорителях. После появления теоремы КАМ возник вопрос: являются ли движения планет Солнечной системы устойчивыми? Доказано, что движение двух взаимодействующих тел устойчиво. Однако уже задача движения трёх тел не имеет полного аналитического решения. Существуют несколько частных решений, которые были найдены Л. Эйлером, Ж. Л. Лагранжем и другими современными учёными. Сейчас существует возможность благодаря большим вычислительным мощностям строить

численные решения и рассматривать их устойчивость. Однако такой метод не даёт долгосрочных сценариев развития движения в Солнечной системе [10, 13].

Также следует сказать, что у стационарных динамических систем не существует аттракторов в фазовом пространстве как у диссипативных систем. Фазовое пространство гамильтоновой системы с хаосом строго делится на области регулярного и нерегулярного движения [13].

Увидеть хаотическое движение классической системы можно с помощью метода поверхности сечения, созданным Пуанкаре в конце XIX века. Данный метод позволяет наглядно изображать изменения в динамической системе. Суть метода заключается в построении сечения

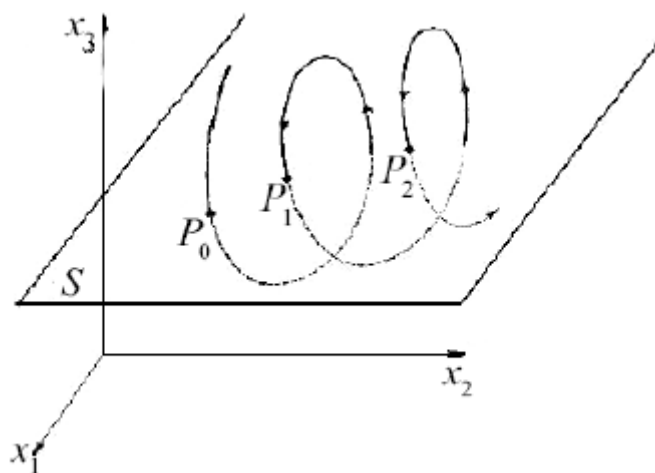


Рис. 3. Сечение Пуанкаре.

поверхности фазового портрета некоторой секущей плоскостью. Например, на рис. 3 изображена фазовая траектория некоторой системы в фазовом пространстве (x_1, x_2, x_3) . Фазовую траекторию пересекает плоскость S . Результатом пересечения являются точки P_0, P_1, P_2 . Множество всех точек секущей плоскости будет образовывать сечение Пуанкаре.

Для примера рассмотрим нелинейную систему Хенона – Хейлеса и её гамильтониан с определенными параметрами:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y + \frac{1}{3}y^3$$

Построим сечение Пуанкаре при следующих начальных данных:

$x = 0$ – плоскость сечения;

$H_0 = \frac{1}{6}$ – энергия;

$x_0 = 0, y_0 = 0, p_y^0 = 0$.

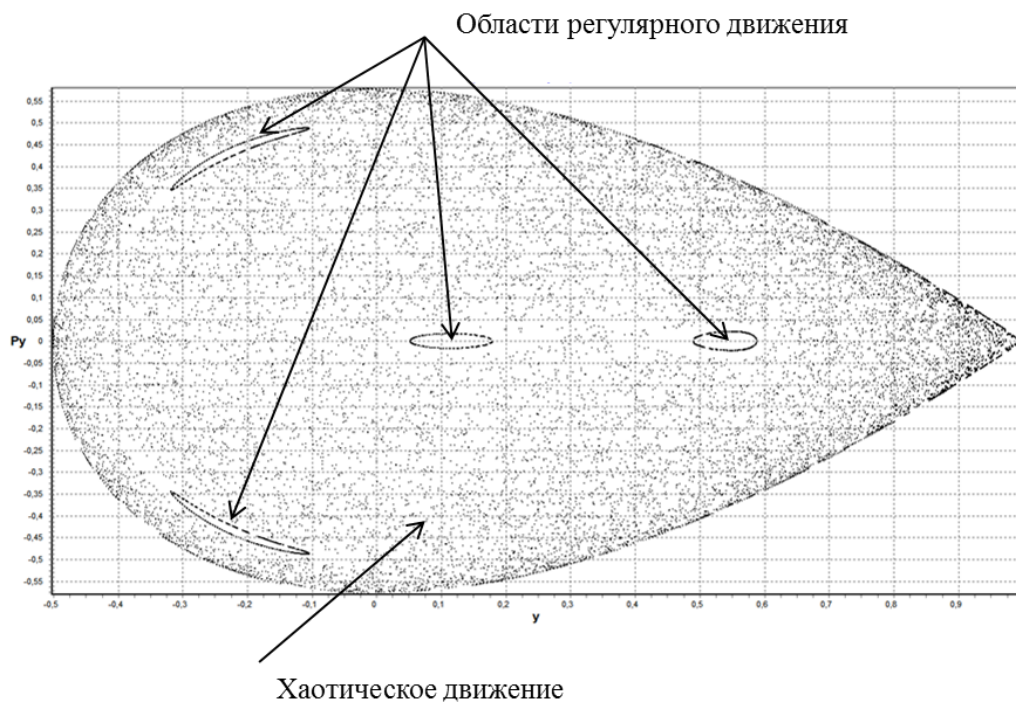


Рис. 4. Сечение Пуанкаре для системы Хенона – Хейлеса.

На рис. 4 видно, что фазовое пространство системы делится на области регулярного и хаотического движения. Внутри «капли» с хаотическим движением есть «островки» с регулярным движением.

Также детерминированный хаос может проявляться в консервативных квантовых системах. Вопрос нерегулярного движения квантовых систем поднимается в задачах оптики, физики плазмы и акустики [5].

1.4 Гамильтонов формализм

Рассмотрим динамику системы согласно принципам гамильтоновой механики.

Эволюция динамической системы с s степенями свободы задаётся с помощью обобщенных координат (q_1, q_2, \dots, q_s) и обобщенных импульсов (p_1, p_2, \dots, p_s) .

Любую механическую систему можно охарактеризовать с помощью *функции Лагранжа*:

$$L = T - U,$$

где T – полная кинетическая энергия системы, а U – полная потенциальная энергия механической системы.

Если для данной системы известен вид функции Лагранжа, *то уравнение Лагранжа* второго рода полностью определяет движение системы при заданных начальных условиях:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (3)$$

Далее проводя преобразования Лежандра для (3), можно получить выражение для обобщенного импульса:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

Применяя преобразования Лежандра к функции Лагранжа, получаем *функцию Гамильтона* или *гамильтониан* динамической системы:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t),$$

где $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ – это s -мерные векторы $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_s)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_s)$, $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s)$.

Движение динамической системы может быть однозначно задано с помощью *уравнений Гамильтона*:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, i = \overline{1, s}.$$

Уравнения Гамильтона представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, решая которые можно получить закон эволюции динамической системы в явном виде [12].

При определении эволюции динамической системы часто используется оператор, который называется *скобки Пуассона*. В канонических координатах они имеют следующий вид [12]:

$$[g, f] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right),$$

где g, f – пара любых динамических переменных.

Пусть функция $f = f(p, q, t)$. Тогда для неё справедливо

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial p_i}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = [H, f] + \frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned}$$

1.5 Матричный формализм

В данной работе рассматриваются динамические системы, оператор эволюции которых в общем случае задан системой нелинейных дифференциальных уравнений. Существуют приближенные методы для построения решения таких систем.

Алгоритм погружения в пространство фазовых портретов

Данный алгоритм построен согласно идеологии теории возмущений. Основная идея заключается в последовательном приближении решения.

Уравнение движения динамической системы можно записать в виде:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \mathbf{F}(0, t) \equiv 0. \quad (4)$$

Данное уравнение может быть переписано в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}^{1k} \mathbf{X}^{[k]}. \quad (5)$$

Уравнение в пространстве фазовых портретов:

$$\frac{d\mathbf{X}^{[k]}}{dt} = \sum_{j=k}^{\infty} \mathbb{P}^{kj}(t) \mathbf{X}^{[j]}, \quad (6)$$

$$\mathbb{P}^{kj} = \mathbb{P}^{k(j-k+1)} \oplus \mathbb{P}^{(k-1)(j-1)}, j \geq k,$$

$$\mathbb{P}^{kk} = \mathbb{P}^{11} \oplus \mathbb{P}^{(k-1)(k-1)} = (\mathbb{P}^{11})^{\oplus k}, k \geq 2.$$

Уравнения (5) и (6) записаны с использованием тензорной идеологии: оператор « \oplus » – это тензорная сумма, оператор степени в квадратных скобках – это кронекеевская степень.

Уравнение (6) по виду является линейным дифференциальным уравнением и его решение можно записать с помощью матрицианта \mathbb{R}^{∞}

$$\mathbf{X}^{\infty} = \mathbb{R}^{\infty}(t) \mathbf{X}_0^{\infty}, \quad (7)$$

где $\mathbb{R}^{\infty}(t_0|t_0) = \mathbb{E}^{\infty}$, $\mathbf{X}_0^{\infty} = \mathbf{X}^{\infty}(t_0)$. Итак, для того чтобы получить решение системы дифференциальных уравнений (2), необходимо найти коэффициенты матрицианта $\mathbb{R}^{\infty} = \{\mathbb{R}^{ik}\}_{i,k=\overline{1,\infty}}$.

Шаг 1.

Рассматривается линеаризованное уравнение, полученное из уравнения (5) отсечением всех членов ряда до первой степени:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbb{P}^{11}\mathbf{X}. \quad (8)$$

Решение уравнения (8):

$$\mathbf{X} = \mathbb{R}^{11}(t|t_0)\mathbf{X}_0, \quad \mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t_0). \quad (9)$$

Шаг 2.

Подставим (9) в уравнение, полученное из уравнения (5) отсечением всех членов ряда до второй степени:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbb{P}^{11}\mathbf{X} + \mathbb{P}^{12}\mathbf{X}^{[2]}.$$

Получим:

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbb{P}^{11}(t|t_0)\mathbf{X} + \mathbb{P}^{12}\mathbb{R}^{22}(t|t_0)\mathbf{X}_0^{[2]}, \quad (10)$$

при этом используется свойство кронекеровского произведения:

$$\mathbf{X}^{[k]} = (\mathbf{X}^{11})^{[k]}.$$

Найдём решение уравнения (10) с помощью формулы Коши:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \mathbb{R}^{11}(t|t_0)(\mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t (\mathbb{R}^{11}(\tau|t_0))^{-1} \mathbb{P}^{12}(\tau) \mathbb{R}^{22}(\tau|t_0) \mathbf{X}_0^{[2]} d\tau) = \\ &= \mathbb{R}^{11}(t|t_0)\mathbf{X}_0 + \mathbb{R}^{12}(t|t_0)\mathbf{X}_0^{[2]}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\mathbb{R}^{12} = \int_{t_0}^t (\mathbb{R}^{11}(\tau|t_0))^{-1} \mathbb{P}^{12}(\tau) \mathbb{R}^{22}(\tau|t_0) d\tau$.

Шаг 3

Подставим (11) в уравнение, полученное из уравнения (5) отсечением всех членов ряда до третьей степени и получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = & \mathbb{P}^{11}(t|t_0)\mathbf{X} + \mathbb{P}^{12}(\mathbb{R}^{11}(t|t_0)\mathbf{X}_0 + \mathbb{R}^{12}(t|t_0)\mathbf{X}_0^{[2]})^{[2]} + \\ & + \mathbb{P}^{13}(\mathbb{R}^{11}(t|t_0)\mathbf{X}_0 + \mathbb{R}^{12}(t|t_0)\mathbf{X}_0^{[2]})^{[3]}. \end{aligned}$$

Решение этого уравнения:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbb{R}^{11}(t|t_0)\mathbf{X}_0 + \mathbb{R}^{12}(t|t_0)\mathbf{X}_0^{[2]} + \hat{\mathbb{R}}^{13}(t|t_0)\mathbf{X}_0^{[3]},$$

где $\hat{\mathbb{R}}^{13}$ имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{R}}^{13}(t|t_0) = & \int_{t_0}^t \mathbb{R}^{11}(t|\tau) \mathbb{P}^{12}(\tau) (\mathbb{R}^{11}(\tau|t_0) \otimes \mathbb{R}^{12}(\tau|t_0) + \mathbb{R}^{12}(\tau|t_0) \\ & \otimes \mathbb{R}^{11}(\tau|t_0)) d\tau + \int_{t_0}^t \mathbb{R}^{11}(t|\tau) \mathbb{P}^{13}(\tau) \mathbb{R}^{33}(\tau|t_0) d\tau. \end{aligned}$$

Оператор « \otimes » - это оператор кронекеровского умножения.

Таким образом, было получено решение системы (4) до третьего порядка точности. Продолжая построение решений по заданному алгоритму, можно получить решение любой наперёд заданной точности [3, 1].

1.6 Симплектичность

Для гамильтоновых систем характерно свойство симплектичности:

$$[q_i(t), p_j(t)] = [q_i(0), p_i(0)], \forall i, j,$$

где $[f, g]$ – это скобки Пуассона.

Обычно Гамильтониан динамической системы зависит от координат $q(t)$ и $p(t)$. Уравнения движения есть два нелинейных обыкновенных

дифференциальных уравнения. Известно, что для большинства нелинейных систем не существует или не найдено аналитическое решение. Поэтому такие системы решают численно. Однако используемые численные методы, например метод Рунге-Кутты или метод рядов Тейлора, разработаны для любых систем дифференциальных уравнений и не специализируются на гамильтоновых системах. В связи с этим в таких методах не учитывается свойство симплектичности и в итоге получаемое решение этим свойством не обладает. В результате численное решение может значительно отличаться от точного. Иногда фазовый портрет несимплектических решений напоминает решения с динамическим хаосом. Фазовые траектории начинают вести себя непредсказуемо, появляясь то в одном, то в другом месте фазового пространства, что и напоминает хаос.

Решая систему дифференциальных уравнений динамической системы в идеологии матричного формализма, ищут решение, представимое в виде бесконечного ряда (7)

$$\mathbf{X}^\infty = \mathbb{R}^\infty(t)\mathbf{X}_0^\infty.$$

Однако на практике в решение входит лишь конечно число слагаемых ряда (7). Из-за такого «усечения» ряда решение системы теряет свойство симплектичности.

В терминах матричного формализма условие симплектичности запишется следующим образом:

$$\mathbb{M}^*(\mathbf{X}, t|t_0)\mathbb{J}(\mathbf{X})\mathbb{M}(\mathbf{X}; t|t_0) = \mathbb{J}(\mathbf{X}), \quad (11)$$

где $\mathbb{M}(\mathbf{X}; t|t_0)$ – это матрица Якоби преобразования M динамической системы:

$$\mathbb{M}(\mathbf{X}; t|t_0; M) = \mathbb{M}(\mathbf{X}; t|t_0) = \frac{\partial M(t|t_0; H) \circ \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}^*}.$$

Выберем для $\mathbb{J}(\mathbf{X})$ каноническую симплектическую матрицу \mathbb{J}_0 , тогда условие (11) будет выглядеть

$$\mathbb{M}^*(\mathbf{X}, t|t_0) \mathbb{J}_0 \mathbb{M}(\mathbf{X}; t|t_0) = \mathbb{J}_0,$$

где

$$\det \mathbb{M}(\mathbf{X}; t|t_0) = 1.$$

Далее используя алгебру Ли и вышеуказанные условия симплектичности, можно получить матричное уравнение, которое позволяет найти симплектические поправки для решения любой точности:

$$\sum_{k+l=m} (\mathbf{X}^{\odot k})^* (\mathbb{Q}^{1(k+1)})^* \mathbb{J}_0 \mathbb{Q}^{1(l+1)} \mathbf{X}^{\odot l} = 0, m \geq 1, \quad (12)$$

где $\mathbb{R}^{1i} = \mathbb{R}^{11} \mathbb{Q}^{1i}$, а \mathbb{R}^{1i} – это матрицы из решения системы (7). Также $\mathbf{X}^{\odot k}$ – это сокращенный вид для записи выражения

$$\mathbf{X}^{\odot(k-1)} = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{X}^{[j]} \otimes \mathbb{E} \otimes \mathbf{X}^{[k-j-1]}.$$

Решая матричные уравнения (12) для разных матриц \mathbb{Q}^{1i} , где i – порядок точности решения, можно получить симплектические поправки для матриц \mathbb{Q}^{1i} , учитывая которые, можно получить более точное решение гамильтоновой системы [1, 19].

В следующей главе будет рассмотрена определенная динамическая система, её решение в идеологии матричного формализма, а также будут вычислены симплектические поправки для данной системы.

Глава 2. Исследование динамической системы для негармонического осциллятора

В данной главе рассматриваются уравнения движения негармонического осциллятора. Сначала изучается поведение решения данных уравнений с помощью математического пакета Maple 15. Далее будет приведено решение в идеологии матричного формализма и найдены симплектические поправки, а также представлены фазовые портреты динамической системы без учета и с учётом симплектических поправок.

2.1 Негармонический осциллятор

Будет рассматриваться динамическая система, определяющая движение негармонического осциллятора. Гамильтониан системы имеет следующий вид:

$$H = \frac{q^2 + p^2}{2} - \alpha \frac{q^4}{24},$$

где α – это параметр, который значительно влияет на вид фазового портрета.

Уравнения Гамильтона для данной системы:

$$\begin{cases} q' = p \\ p' = -q + \alpha \frac{q^3}{6} \end{cases} \quad (13)$$

2.2 Исследование решения уравнения негармонического осциллятора

Для начала решение уравнения негармонического осциллятора было исследовано с помощью математического пакета Maple 15.

1 метод

Система уравнений (13) была решена методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Начальные условия: $q(0) = 0,8$, $p(0) = 0$. Фазовые портреты с различными значениями параметра α можно видеть на рис. 5.

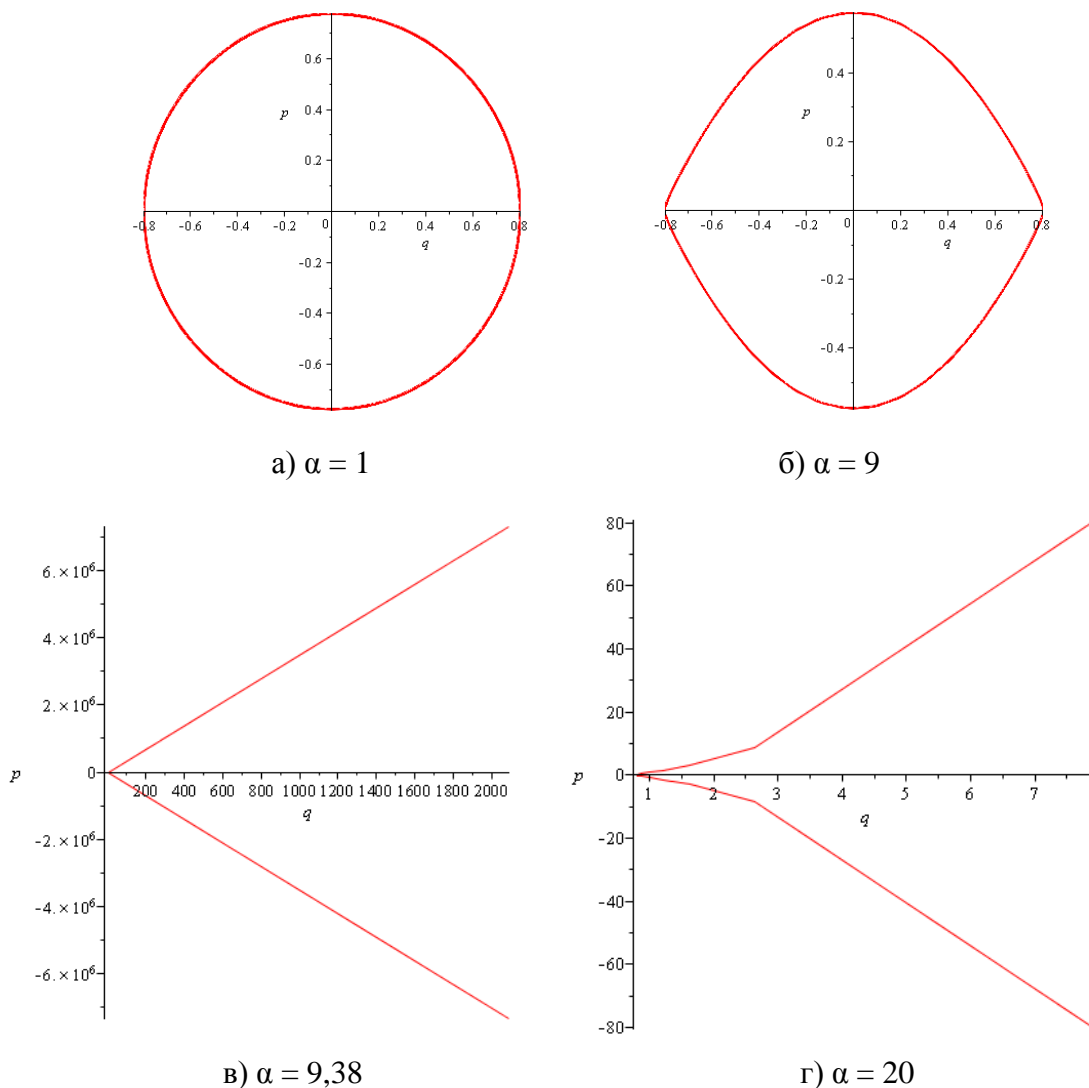


Рис. 5. Фазовый портрет решение уравнения негармонического осциллятора методом Рунге-Кутты 4-го порядка при разных значениях параметра α .

При значениях параметра $\alpha < 9,38$ фазовый портрет решения являются окружность и схожие с ней кривые (см. рис. 5 а), б)). Однако при $\alpha \geq 9,38$

фазовой портрет вырождается в две симметричные относительно оси q кривые (см. рис. 5 в), г)).

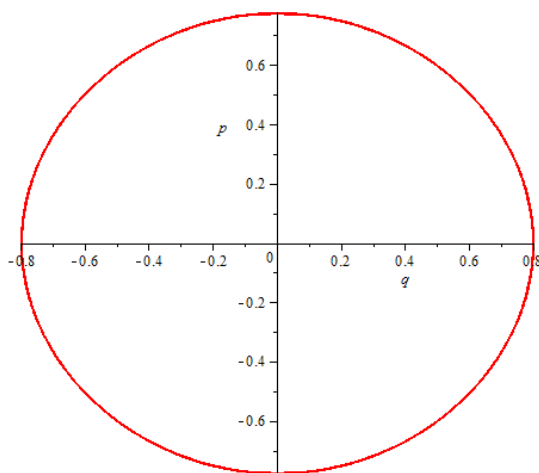
Существует предположение, что такой резкий переход от одного вида фазового портрета к другому обусловлен тем, что стандартный метод Рунге-Кутты четвертого порядка математического пакета Maple 15 не учитывает свойство симплектичности гамильтоновых систем.

2 метод

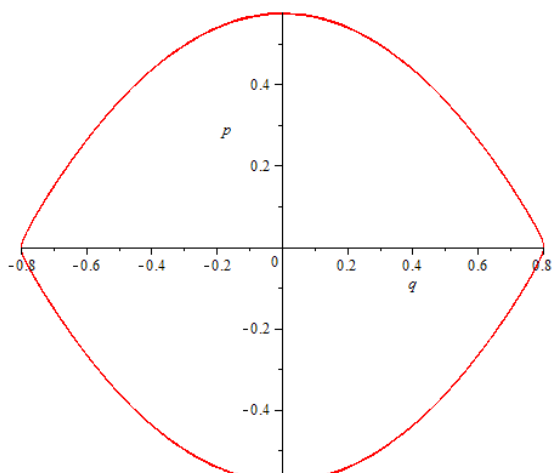
Теперь система уравнений (13) была решена с помощью метода рядов Тейлора пятого порядка. Начальные условия: $q(0) = 0,8$, $p(0) = 0$. Фазовые портреты с различными значениями параметра α можно видеть на рис. 6.

Аналогично 1-му методу при решении системы уравнений (13) методом рядов Тейлора наблюдается резкая смена вида фазового портрета при переходе значения параметра $\alpha \approx 9,38$.

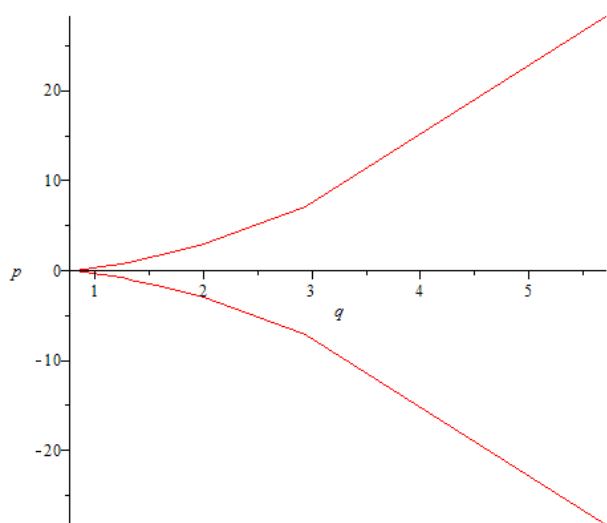
Подобное поведение фазового портрета при изменении параметра α может возникнуть из-за наличия детерминированного хаоса оператора эволюции динамической системы. Однако можно доказать, что такое явления возникает из-за отсутствия в данных методах поправки на симплектичность. Далее система уравнений (13) будет решена в идеологии матричного формализма и будут найдены симплектические коэффициенты.



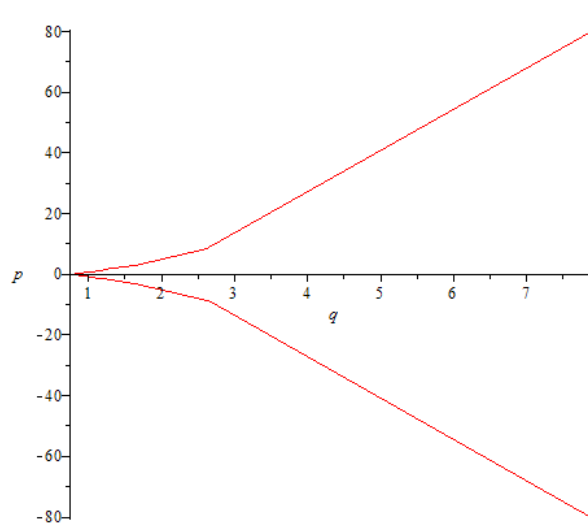
а) $\alpha = 1$



б) $\alpha = 9$



в) $\alpha = 9,38$



г) $\alpha = 20$

Рис. 6. Фазовый портрет решение уравнения негармонического осциллятора методом рядов Тейлора при разных значениях параметра α .

2.3 Решение уравнения негармонического осциллятора в идеологии матричного формализма

Система обыкновенных уравнений (13) в матричном виде:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbb{P}^{11}\mathbf{X} + \mathbb{P}^{12}\mathbf{X}^{[2]} + \mathbb{P}^{13}\mathbf{X}^{[3]}, \quad (14)$$

где

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{P}^{11}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{P}^{12}\mathbf{X}^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^2 \\ qp \\ p^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{P}^{13}\mathbf{X}^{[3]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^3 \\ q^2p \\ qp^2 \\ p^3 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\mathbf{X} = \mathbb{R}^{11}\mathbf{X}_0 + \mathbb{R}^{12}\mathbf{X}_0^{[2]} + \mathbb{R}^{13}\mathbf{X}_0^{[3]}. \quad (15)$$

Продифференцируем по времени и получим

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{d\mathbb{R}^{11}}{dt}\mathbf{X}_0 + \frac{d\mathbb{R}^{12}}{dt}\mathbf{X}_0^{[2]} + \frac{d\mathbb{R}^{13}}{dt}\mathbf{X}_0^{[3]} \quad (16)$$

Подставим (15) в (14) и отбросим члены выше третьей кронекеровской степени:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbb{P}^{11} \left(\mathbb{R}^{11}\mathbf{X}_0 + \mathbb{R}^{12}\mathbf{X}_0^{[2]} + \mathbb{R}^{13}\mathbf{X}_0^{[3]} \right) + \mathbb{P}^{12} \left(\mathbb{R}^{22}\mathbf{X}_0^{[2]} \right) + \\ + \mathbb{P}^{13} \left(\mathbb{R}^{33}\mathbf{X}_0^{[3]} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Приравниваем (16) и (17):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{R}^{11}}{dt}\mathbf{X}_0 + \frac{d\mathbb{R}^{12}}{dt}\mathbf{X}_0^{[2]} + \frac{d\mathbb{R}^{13}}{dt}\mathbf{X}_0^{[3]} = \\ = (\mathbb{P}^{11}\mathbb{R}^{11})\mathbf{X}_0 + (\mathbb{P}^{11}\mathbb{R}^{12} + \mathbb{P}^{12}\mathbb{R}^{22})\mathbf{X}_0^{[2]} + \\ + (\mathbb{P}^{11}\mathbb{R}^{13} + \mathbb{P}^{13}\mathbb{R}^{33})\mathbf{X}_0^{[3]}. \end{aligned}$$

Приравняем множители при \mathbf{X}_0 , $\mathbf{X}_0^{[2]}$ и $\mathbf{X}_0^{[3]}$:

$$\frac{d\mathbb{R}^{11}}{dt} = \mathbb{P}^{11}\mathbb{R}^{11}, \quad (18)$$

$$\frac{d\mathbb{R}^{12}}{dt} = \mathbb{P}^{11}\mathbb{R}^{12} + \mathbb{P}^{12}\mathbb{R}^{22}, \quad (19)$$

$$\frac{d\mathbb{R}^{13}}{dt} = \mathbb{P}^{11}\mathbb{R}^{13} + \mathbb{P}^{13}\mathbb{R}^{33}. \quad (20)$$

Получились три системы дифференциальных уравнений, независящих друг от друга.

Решение системы (18) относительно \mathbb{R}^{11} :

$$\mathbb{R}^{11} = \exp(\mathbb{P}^{11}(t - t_0)) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}$$

Решение системы (19) относительно \mathbb{R}^{12} :

$$\mathbb{R}^{12} = \int_{t_0}^t \mathbb{R}^{11}(t | \tau) \mathbb{P}^{12}(\tau) \mathbb{R}^{22}(t | t_0) d\tau$$

Заметим, что $\mathbb{P}^{12} = \mathbb{O}$. Тогда $\mathbb{R}^{12} \equiv \mathbb{O}$.

Решение системы (20) относительно \mathbb{R}^{13} :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{13} = & \int_{t_0}^t (\mathbb{R}^{11}(t | \tau))^{-1} \mathbb{P}^{12}(\tau) \mathbb{R}^{23}(t | t_0) d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t (\mathbb{R}^{11}(t | \tau))^{-1} \mathbb{P}^{13}(\tau) \mathbb{R}^{33}(t | t_0) d\tau = \end{aligned}$$

$$= \int_{t_0}^t (\mathbb{R}^{11}(t|\tau))^{-1} \mathbb{P}^{13}(\tau) \mathbb{R}^{33}(t|t_0) d\tau$$

Для решения интеграла сначала необходимо найти $(\mathbb{R}^{11})^{-1}$ и \mathbb{R}^{33} .

$$(\mathbb{R}^{11})^{-1} = \frac{1}{r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21}} \begin{pmatrix} r_{22} & -r_{21} \\ -r_{12} & r_{11} \end{pmatrix}.$$

Для нахождения \mathbb{R}^{33} используется свойство кронекеровской степени.

$$\mathbb{R}^{22} = (\mathbb{R}^{11})^{[2]},$$

$$\mathbb{R}^{33} = \mathbb{R}^{22} \otimes \mathbb{R}^{11},$$

$$\mathbb{R}^{22} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}^2 & r_{11}r_{12} & r_{11}r_{12} & r_{12}^2 \\ r_{11}r_{21} & r_{11}r_{22} & r_{12}r_{21} & r_{12}r_{22} \\ r_{11}r_{21} & r_{12}r_{21} & r_{11}r_{22} & r_{12}r_{22} \\ r_{21}^2 & r_{21}r_{22} & r_{21}r_{22} & r_{22}^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11}^2 & 2r_{11}r_{12} & r_{12}^2 \\ r_{11}r_{21} & r_{12}r_{21} + r_{11}r_{22} & r_{12}r_{22} \\ r_{21}^2 & 2r_{21}r_{22} & r_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{33} &= \begin{pmatrix} r_{11}^2 & 2r_{11}r_{12} & r_{12}^2 \\ r_{11}r_{21} & r_{12}r_{21} + r_{11}r_{22} & r_{12}r_{22} \\ r_{21}^2 & 2r_{21}r_{22} & r_{22}^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} r_{11}^3 & 3r_{11}^2r_{12} & 3r_{11}r_{12}^2 & r_{12}^3 \\ r_{11}^2r_{21} & r_{11}^2r_{22} + 2r_{11}r_{12}r_{21} & r_{12}^2r_{21} + 2r_{11}r_{12}r_{22} & r_{12}^2r_{22} \\ r_{21}^2r_{11} & r_{21}^2r_{12} + 2r_{11}r_{21}r_{22} & r_{22}^2r_{11} + 2r_{12}r_{21}r_{22} & r_{22}^2r_{12} \\ r_{21}^3 & 3r_{21}^2r_{22} & 3r_{21}r_{22}^2 & r_{22}^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\mathbb{R}^{13} = \int_{t_0}^t (\mathbb{R}^{11}(t|\tau))^{-1} \mathbb{P}^{13}(\tau) \mathbb{R}^{33}(t|t_0) d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_0}^t \frac{1}{6(r_{11}(t|\tau)r_{22}(t|\tau) - r_{12}(t|\tau)r_{21}(t|\tau))} \begin{pmatrix} r_{22}(t|\tau) & -r_{21}(t|\tau) \\ -r_{12}(t|\tau) & r_{11}(t|\tau) \end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_{11}^3(t|t_0) & 3r_{11}^2(t|t_0)r_{12}(t|t_0) & 3r_{11}(t|t_0)r_{12}^2(t|t_0) & r_{12}^3(t|t_0) \end{pmatrix} d\tau = \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} c_1(1 - \cos(t - t_0)) & c_2(1 - \cos(t - t_0)) & c_3(1 - \cos(t - t_0)) & c_4(1 - \cos(t - t_0)) \\ c_1 \sin(t - t_0) & c_2 \sin(t - t_0) & c_3 \sin(t - t_0) & c_4 \sin(t - t_0) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Коэффициенты всех вышеуказанных матриц вычисляются при помощи следующих значений:

$$r_{11}(t|t_0) = r_{22}(t|t_0) = \cos(t - t_0),$$

$$r_{12}(t|t_0) = \sin(t - t_0),$$

$$r_{21}(t|t_0) = -\sin(t - t_0),$$

$$c_1 = \cos^3(t - t_0),$$

$$c_2 = 3\cos^3(t - t_0)\sin(t - t_0),$$

$$c_3 = \cos(t - t_0) \sin^2(t - t_0),$$

$$c_4 = \sin^3(t - t_0).$$

Итак, оператор эволюции для системы (10) имеет вид:

$$\mathbb{R}^3 = \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{11} & \mathbb{O} & \mathbb{R}^{13} \\ \mathbb{O} & \mathbb{R}^{22} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{R}^{33} \end{pmatrix}$$

Окончательное решение системы имеет вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} &= \mathbb{R}^{11}\mathbf{X}_0 + \mathbb{R}^{13}\mathbf{X}_0^{[3]} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos(t - t_0) & \sin(t - t_0) \\ -\sin(t - t_0) & \cos(t - t_0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0 \end{pmatrix} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} c_1(1 - \cos(t - t_0)) & c_2(1 - \cos(t - t_0)) & c_3(1 - \cos(t - t_0)) & c_4(1 - \cos(t - t_0)) \\ c_1 \sin(t - t_0) & c_2 \sin(t - t_0) & c_3 \sin(t - t_0) & c_4 \sin(t - t_0) \end{pmatrix} \times \\
& \times \begin{pmatrix} 0,512 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \cos(t) + \frac{0,256c_1}{3} (1 - \cos(t)) \\ -0,8 \sin(t) + \frac{0,256c_1}{3} \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2.4 Получение симплектических поправок

Для получения симплектических поправок решения уравнения негармонического осциллятора третьей степени точности необходимо решить матричное уравнение (12):

$$(\mathbf{X}^{\odot 2})^T (\mathbb{Q}^{13})^T \mathbb{J}_0 + (\mathbf{X}^{\odot 1})^T (\mathbb{Q}^{12})^T \mathbb{J}_0 \mathbb{Q}^{12} \mathbf{X}^{\odot 1} + \mathbb{J}_0 \mathbb{Q}^{13} \mathbf{X}^{\odot 2} = \mathbb{O}.$$

С учётом $\mathbb{Q}^{12} = 0$ матричное уравнение примет вид

$$(\mathbf{X}^{\odot 2})^T (\mathbb{Q}^{13})^T \mathbb{J}_0 + \mathbb{J}_0 \mathbb{Q}^{13} \mathbf{X}^{\odot 2} = \mathbb{O}. \quad (21)$$

Вычислим левую часть уравнения (21).

$$\mathbf{X}^{\odot 2} = \sum_{j=0}^2 \mathbf{X}^{[j]} \otimes \mathbb{E} \otimes \mathbf{X}^{[3-j-l]} = \mathbb{E} \otimes \mathbf{X}^{[2]} + \mathbf{X} \otimes \mathbb{E} \otimes \mathbf{X} + \mathbf{X}^{[2]} \otimes \mathbb{E} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3q^2 & 0 \\ 2qp & q^2 \\ p^2 & 2qp \\ 0 & 3p^2 \end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{X}^{\odot 2})^T = \begin{pmatrix} 3q^2 & 2qp & p^2 & 0 \\ 0 & q^2 & 2qp & 3p^2 \end{pmatrix};$$

$$(\mathbb{Q}^{13})^T = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \\ q_{13} & q_{23} \\ q_{14} & q_{24} \end{pmatrix};$$

$$\mathbb{J}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{X}^{\odot 2})^T (\mathbb{Q}^{13})^T \mathbb{J}_0 + \mathbb{J}_0 \mathbb{Q}^{13} \mathbf{X}^{\odot 2} = \begin{pmatrix} 0 & Q \\ -Q & 0 \end{pmatrix},$$

где $Q = 3q_{11}q^2 + (2q_{23} + q_{22} + 2q_{12} + q_{13})qp + 3q_{24}p^2$.

Итак, матричное уравнение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & Q \\ -Q & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}.$$

В результате получаются выражения для q_{ij} :

$$q_{11} = 0,$$

$$q_{24} = 0,$$

$$2q_{23} + q_{22} + 2q_{12} + q_{13} = 0 \Rightarrow q_{22} = -2q_{12} - q_{13} - 2q_{23}.$$

Тогда

$$\mathbb{R}^{13} = \mathbb{R}^{11} \begin{pmatrix} 0 & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & -2q_{12} - q_{13} - 2q_{23} & q_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

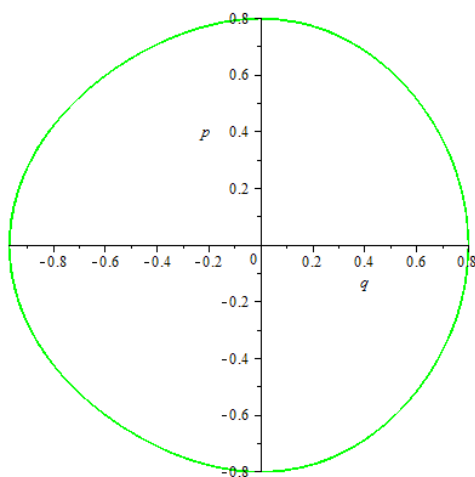
И решение уравнения негармонического осциллятора с учётом симплектичности:

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \cos(t) + \frac{0,256c_1}{3} (\sin^2(t)) \\ -0,8 \sin(t) + \frac{0,256c_1}{3} \sin(t) \cos(t) \end{pmatrix}. \quad (22)$$

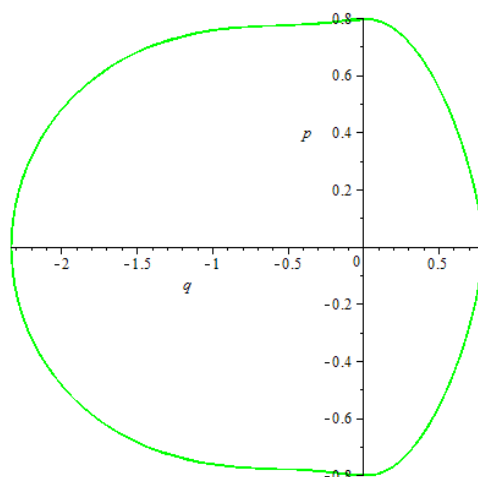
2.5 Исследование матричного решения уравнения негармонического осциллятора

С помощью математического пакета Maple 15 был построен фазовый портрет решения системы уравнений (13), полученного в идеологии матричного формализма, без учёта симплектичности:

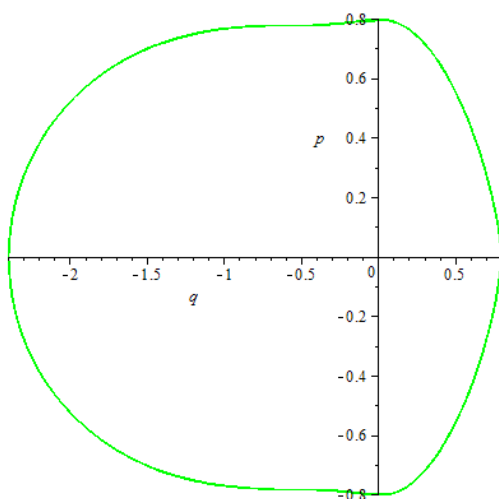
$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \cos(t) + \frac{0,256c_1}{3}(1 - \cos(t)) \\ -0,8 \sin(t) + \frac{0,256c_1}{3} \sin(t) \end{pmatrix}.$$



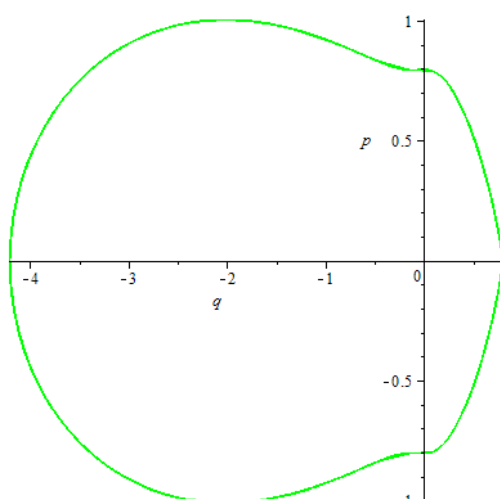
а) $\alpha = 1$



б) $\alpha = 9$



в) $\alpha = 9,38$



г) $\alpha = 20$

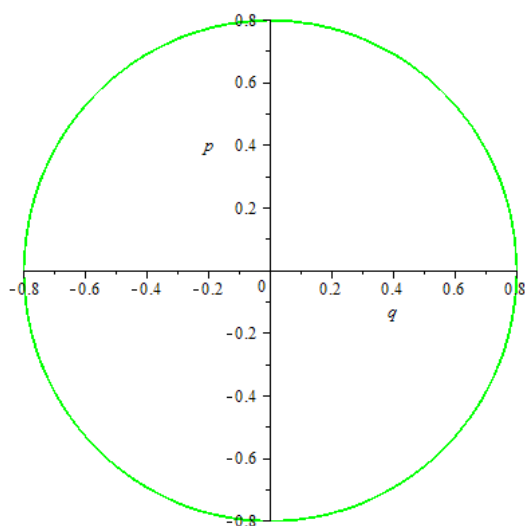
Рис. 7. Фазовый портрет решения уравнения негармонического осциллятора методом последовательных приближений при разных значениях параметра α .

На рис. 7 изображены фазовые портреты решения при различных значениях параметра α . На рис. 7а) можно видеть, что фазовый портрет не совпадает с фазовыми портретами на рис 5а) и 6а), полученными при решении системы методом Рунге-Кутты четвертого порядка и методом рядов

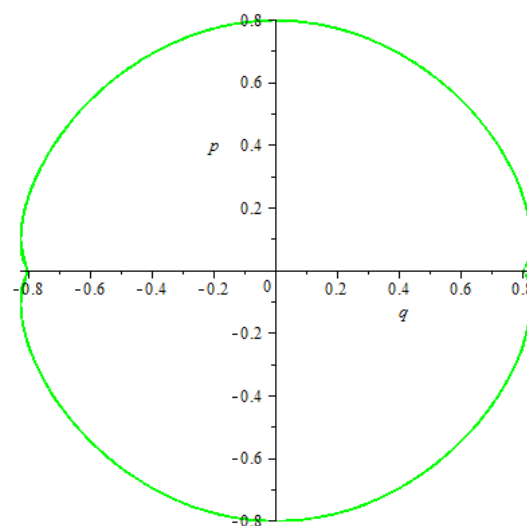
Тейлора. В данном случае кривая фазового портрета более вытянута в отрицательном направлении оси q . Также можно заметить динамику изменения фазового портрета при увеличении значения параметра α . При увеличении параметра α у кривой начинает появляться «хвост» в I и IV четвертях фазовой плоскости.

Фазовый портрет решения системы (22) с учётом симплектичности значительно отличается от решения без её учёта (см. рис. 8).

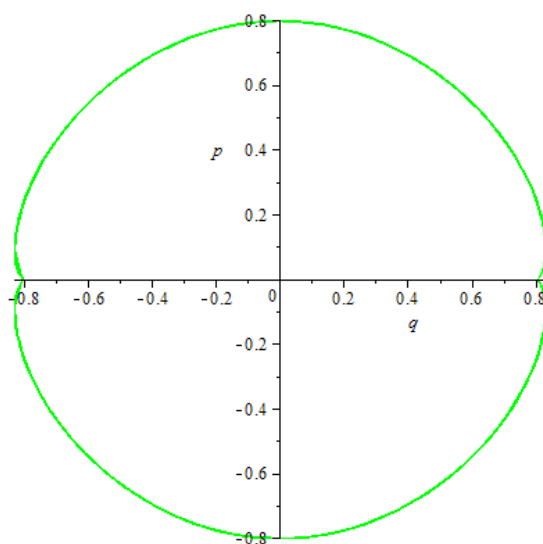
При $\alpha = 1$ фазовый портрет решения полностью совпадает с портретами, полученными численными методами ранее (см. рис. 5а) и 6а)). Также можно заметить, что при переходе от значения $\alpha = 9$ к $\alpha = 9,38$ не происходит резкого изменения вида фазового портрета. Также при $\alpha = 20$ не наблюдается смены вида кривой фазового портрета. Можно заметить динамику изменения фазового портрета: у окружности, полученной при $\alpha = 1$, постепенно появляются вогнутости в районе пересечения кривой осью q , далее в этой же области появляются новые «завитки» кривой.



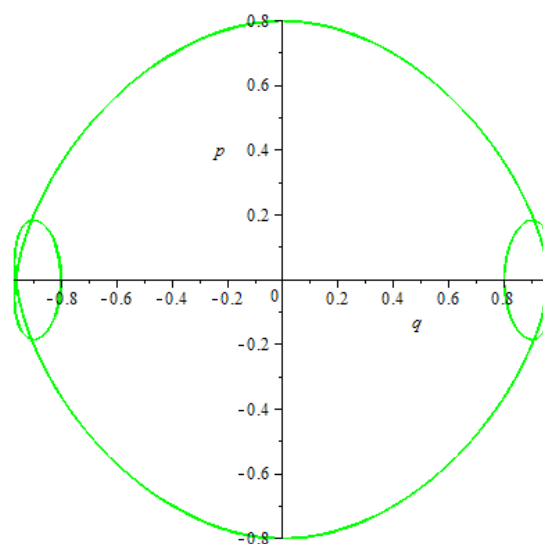
а) $\alpha = 1$



б) $\alpha = 9$



в) $\alpha = 9,38$



г) $\alpha = 20$

Рис. 8. Фазовый портрет решения уравнения негармонического осциллятора методом последовательных приближений с учётом симплектичности при разных значениях параметра α .

Выводы

При изучении динамической системы для негармонического осциллятора с помощью математического пакета Maple 15 было замечено, что при переходе значения параметром $\alpha \approx 9,38$ фазовый портрет системы уравнений динамического осциллятора меняет свой вид: для $\alpha < 9,38$ фазовый портрет имеет вид окружности или схожей с ней кривой; для $\alpha \geq 9,38$ фазовый портрет представляется в виде двух симметричных относительно оси q кривых, находящихся в I и IV четвертях фазовой плоскости. Было сделано предположение, что такое значительное изменение вида фазового портрета обусловлено тем, что в готовых численных методах Рунге-Кутты и рядов Тейлора из математического пакета Maple 15 не учитывается свойство симплектичности, характерное для гамильтоновых систем.

Для подтверждения или опровержения данной гипотезы было построено решение для системы негармонического осциллятора в идеологии матричного формализма с учётом свойства симплектичности и без. Вид фазового портрета системы без учёта симплектичности значительно не совпадал с видом портрета, полученного методом Рунге-Кутты четвертого порядка и методом рядов Тейлора. Вид фазового портрета решения с симплектическими поправками для $\alpha = 1$ совпал с видом портретов для других численных методов. Также при переходе значения параметром $\alpha \approx 9,38$ вид фазового портрета сохраняется, не происходит его значительных изменений.

Таким образом, выдвинутая ранее гипотеза была подтверждена: решение матричным методом и внесение симплектических поправок позволяет сохранить определенный вид фазового портрета при изменении значения параметра α .

Заключение

Гамильтоновы системы классической механики используются для описания движения планет и астероидов в космосе, для движения частиц в ускорителях. Эти направления науки бурно развиваются и поэтому важно помогать решать задачи в этих областях. Нарушение свойства симплектичности при решении гамильтоновых дифференциальных систем может дать неверное представление о поведении реального объекта, который описывает гамильтонова система.

В данной выпускной квалификационной работе были изучены понятия и определения динамической системы, детерминированного хаоса, гамильтонов и матричный формализм. Также подробно разобран метод последовательных приближений решения систем дифференциальных уравнений в идеологии матричного формализма и метод поиска симплектических коэффициентов. Эти методы были применены для изучения системы негармонического осциллятора. Были получены результаты, согласно которым учёт симплектичности гамильтоновых систем имеет значительное влияние на вид решения системы.

Список литературы

1. Андрианов С. Н. Динамическое моделирование пучками частиц. СПб.: Изд-во С.- Петерб. ун-та, 2002. 376 с.
2. Анищенко В. С. Динамические системы // Соросовский образовательный журнал, 1997. №11. С. 77 – 84.
3. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. 367 с.
4. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. Л. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987. 382 с.
5. Вильямс Р. Ф. Структура аттракторов Лоренца // Странные аттракторы / Под ред. Я. Г. Синая, Л. П. Щильникова. М.: Мир, 1981. С. 58 – 72.
6. Данилов Ю.А. Лекции по нелинейной динамике. М.: КомКнига, 2006. 208 с.
7. Кузнецов С. П. Динамический хаос. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 356 с.
8. Магнус К. Колебания: Введение в исследование колебательных систем. М.: Мир, 1982. 304 с.
9. Малинецкий Г. Г. Математические основы синергетики: Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. М.: Либроком, 2009. – 312 с.
10. Маркеев А. П. Задача трех тел и ее точные решения. Соросовский образовательный журнал, 1999. №9. С. 112 – 117.
11. Никитенков Н. Н., Никитенкова Н. А. Синергетика для инженеров: учебное пособие. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2009. 168 с.
12. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М.: Едиториал УРСС, 2011. 320 с.
13. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
14. Cohen D., Jahnke T., Lorenz K., Lubich C. Numerical Integrators for Highly Oscillatory // Analysis, Modeling and Simulation of Multiscale Problems, 2006. P. 553 – 576.

15. Feigenbaum M. J. Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations // Journal of Statistical Physics, 1978. Vol. 19, No. 1. P. 25 – 52.
16. Kang F., Meng-zhao Q. Hamiltonian algorithms for Hamiltonian systems and a comparative numerical study // Computer Physics Communications, 1991. Vol. 65, Issues 1–3. P. 173 – 187.
17. Liu J.-L. Preservation of Periodicity in Variational // San Jose State University SJSU ScholarWorks, 2015. 61 p.
18. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // Journal of the atmospheric sciences, 1963. Vol. 20. P. 130 – 141.
19. Rangarajan G. Symplectic integration of nonlinear Hamiltonian systems / Pramana – journal of physics, 1997. Vol. 48, No. 1. P. 129 – 142/
20. Sarmah H.Kr., Baishya T.Kr., Bhattacharjee D. Intermittency route to chaos in the Logistic Map // IJASR, 2013. Issue 3, Vol. 1. P. 387 – 403.

Приложение к главе 2.

1. Программа для решения системы уравнений негармонического осциллятора с помощью математического пакета Maple 15 методом Рунге-Кутты 4-го порядка

```
restart;
q0 := .8 : t_0 := 0 : p_0 := 0.0 : alpha := 20 :
eq := {diff(q(t), t) = p(t), diff(p(t), t) = -q(t) + alpha*q(t)^3/6,
       q(t_0) = q0, p(t_0) = p_0}; de := dsolve(eq, type = numeric,
       method = classical[rk4], [q(t), p(t)]);
with(plots) : odeplot(de, [q(t), p(t)], -100..100, numpoints = 1000);
```

2. Программа для решения системы уравнений негармонического осциллятора с помощью математического пакета Maple 15 методом рядов Тейлора

```
restart;
q0 := .8 : t_0 := 0 : p_0 := 0.0 : alpha := 20 :
eq := {diff(q(t), t) = p(t), diff(p(t), t) = -q(t) + alpha*q(t)^3/6,
       q(t_0) = q0, p(t_0) = p_0}; de := dsolve(eq, type = numeric,
       method = taylorseries, order = 5, [q(t), p(t)]);
with(plots) : odeplot(de, [q(t), p(t)], -100..100, numpoints = 1000);
```

3. Программа для построения фазового портрета решения системы уравнений негармонического осциллятора, полученного методом последовательных приближений решений по алгоритму погружения в пространство фазовых портретов, с помощью математического пакета Maple 15

```
restart;
alpha := 20;
q := t -> 0.8*cos(t) + alpha*0.256/3*(cos^3(t) - cos^4(t)) :
p := t -> -0.8*sin(t) + alpha*0.256/3*(cos^3(t)*sin(t)) :
plot([evalf(q(t)), evalf(p(t)), t = -100..100], color = green, thickness
     = 1,
     labels = [q, p])
```

4. Программа для построения фазового портрета решения системы уравнений негармонического осциллятора, полученного методом последовательных приближений решений по алгоритму погружения в пространство фазовых портретов с учётом симплектичности, с помощью математического пакета Maple 15

```
restart;
alpha := 20 :
q := t → 0.8 cos(t) + alpha·0.256/3·(cos3(t)·sin2(t)) :
p := t → -0.8 sin(t) + alpha·0.256/3·(cos4(t)·sin(t)) :
plot([evalf(q(t)), evalf(p(t)), t = -100 .. 100], color = green, thickness
    = 1, labels = [q, p]);
```